Analyse non asymptotique d'un test séquentiel de détection de ruptures et application aux bandits non stationnaires

Conférence GRETSI @ Lille, Août 2019

Lilian Besson

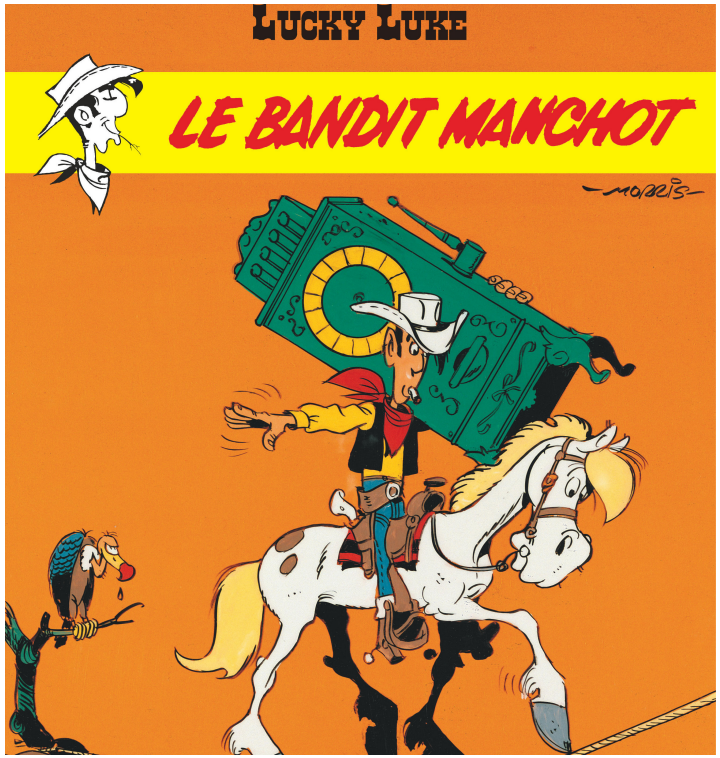
Doctorant

Équipe SCEE, labo IETR, CentraleSupélec à Rennes
& Équipe SequeL, labo CRIStAL, Inria à Lille

Jeudi 29 Août 2019

Bandits manchots ?

Un vieux nom pour une machine à sous !



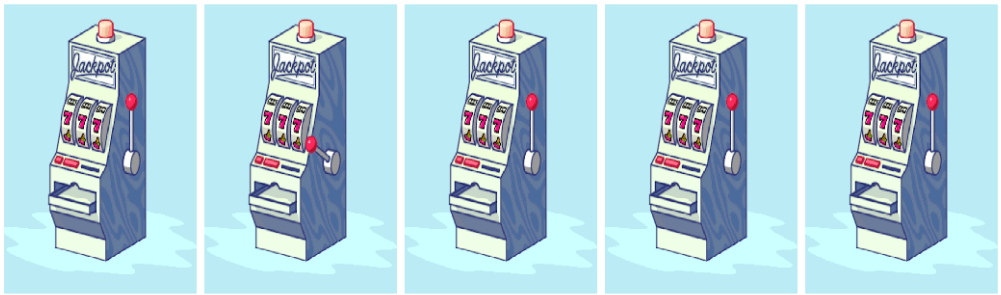
Collaboration avec mon encadrante de thèse **Émilie Kaufmann**, cf. sa conférence plénière de mardi 27 août !

↪ Source Lucky Luke tome 18, © Dargaud.

Bandits multi-bras

= Prise de décisions séquentielles face à des environnements incertains :

Total Reward	Total Plays
14	24



1

	Arm 1	Arm 2	Arm 3	Arm 4	Arm 5
Rewards:	6	2	2	2	2
Pulls:	8	4	4	4	4
Estimated Probs:	0.750	0.500	0.500	0.500	0.500
UCBs:	1.641	1.761	1.761	1.761	1.761

↪ Démo interactive `perso.crans.org/besson/phd/MAB_interactive_demo/`

Bandits multi-bras : stationnaires vs non-stationnaires

Stationnaires

Ok !

Bandits multi-bras : stationnaires vs non-stationnaires

Stationnaires

Ok !

Non stationnaires

Difficile !

Bandits multi-bras : stationnaires vs non-stationnaires

Stationnaires

Ok !

Non stationnaires

Difficile !

Notre direction de résolution

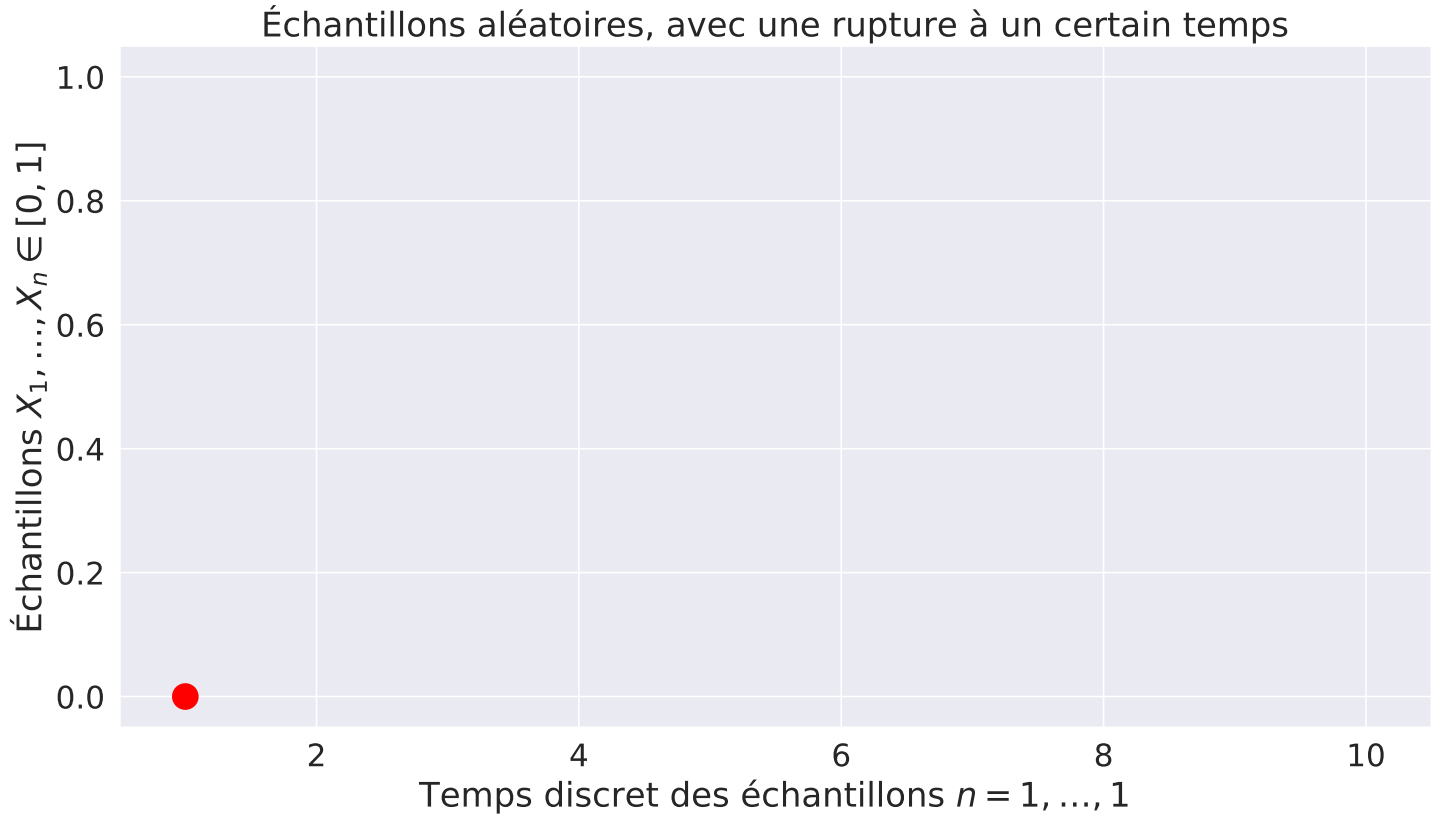
On combine :

- un algorithme classique (kl-UCB) pour sélectionner les bras,
- et on détecte les ruptures activement grâce à un test statistique effectué sur chaque bras.

Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

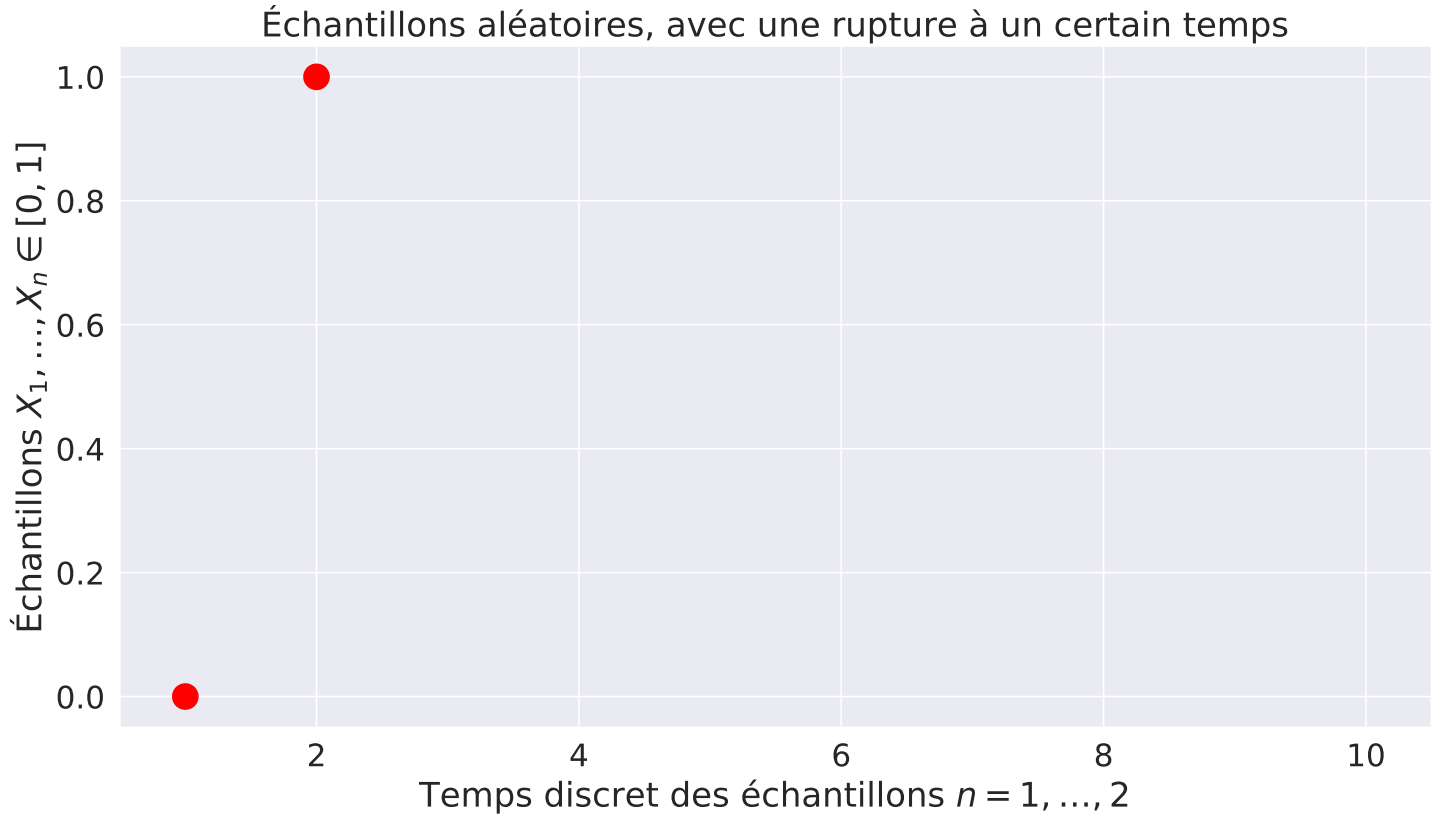
- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

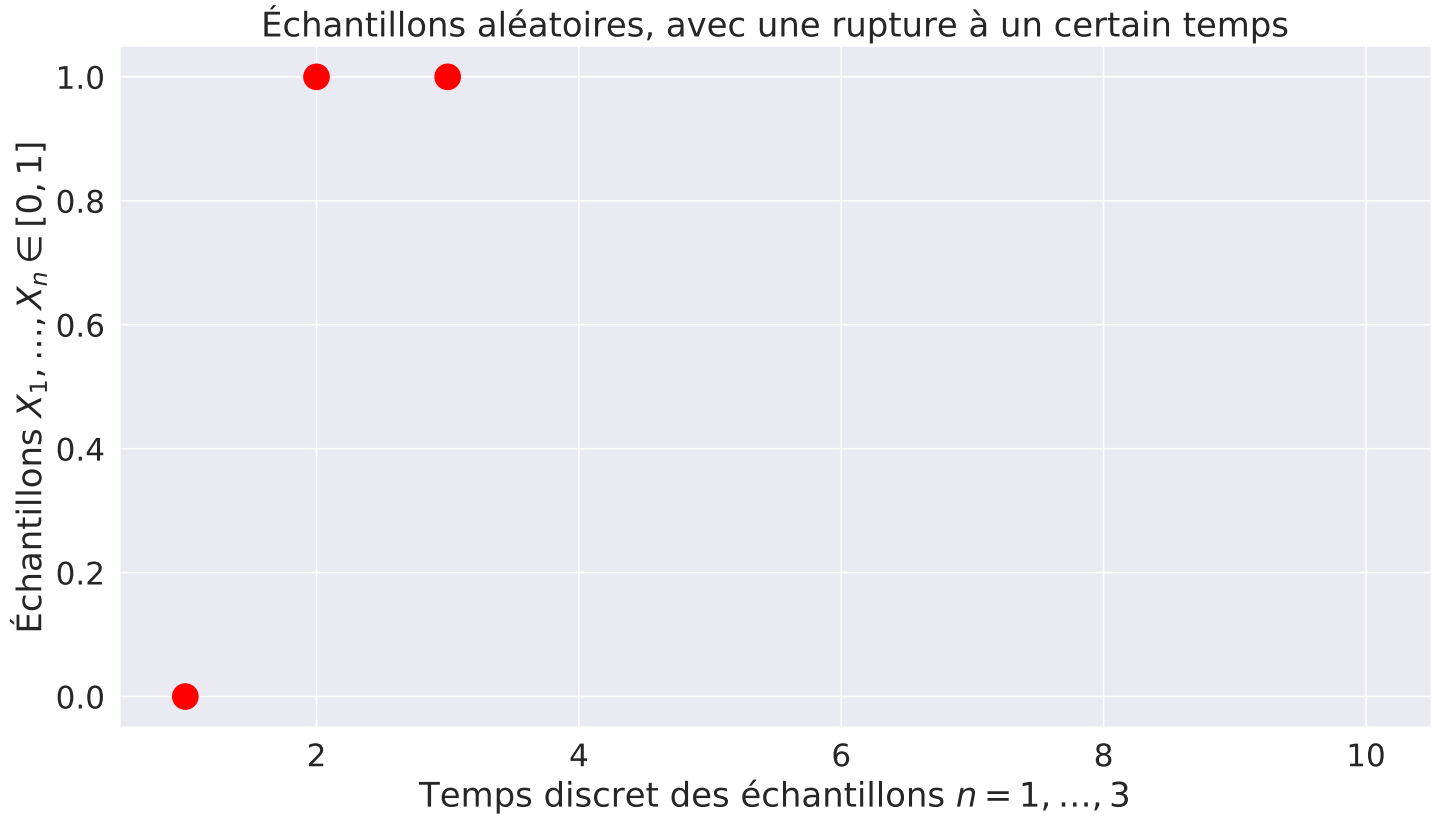
- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

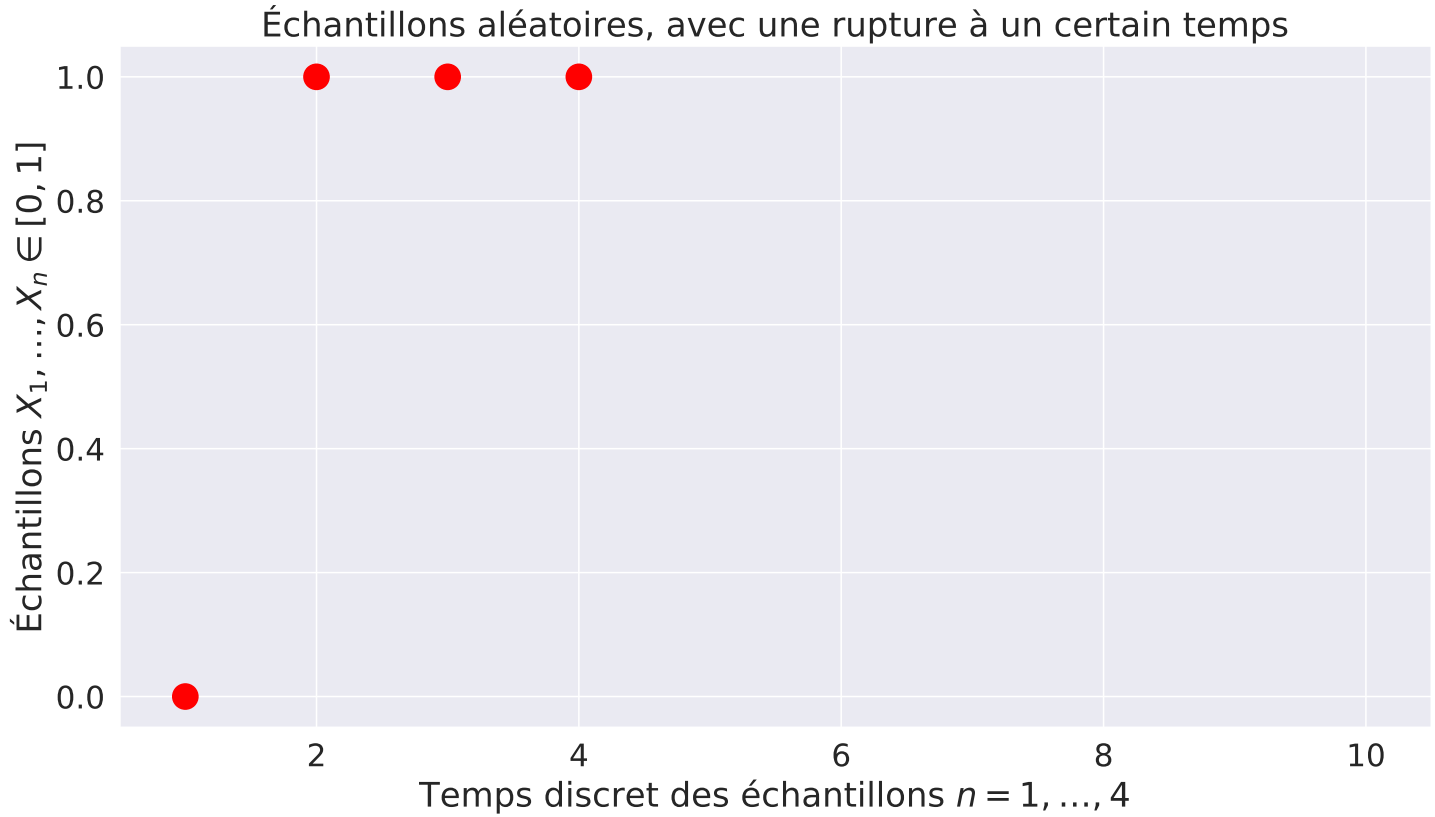
- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

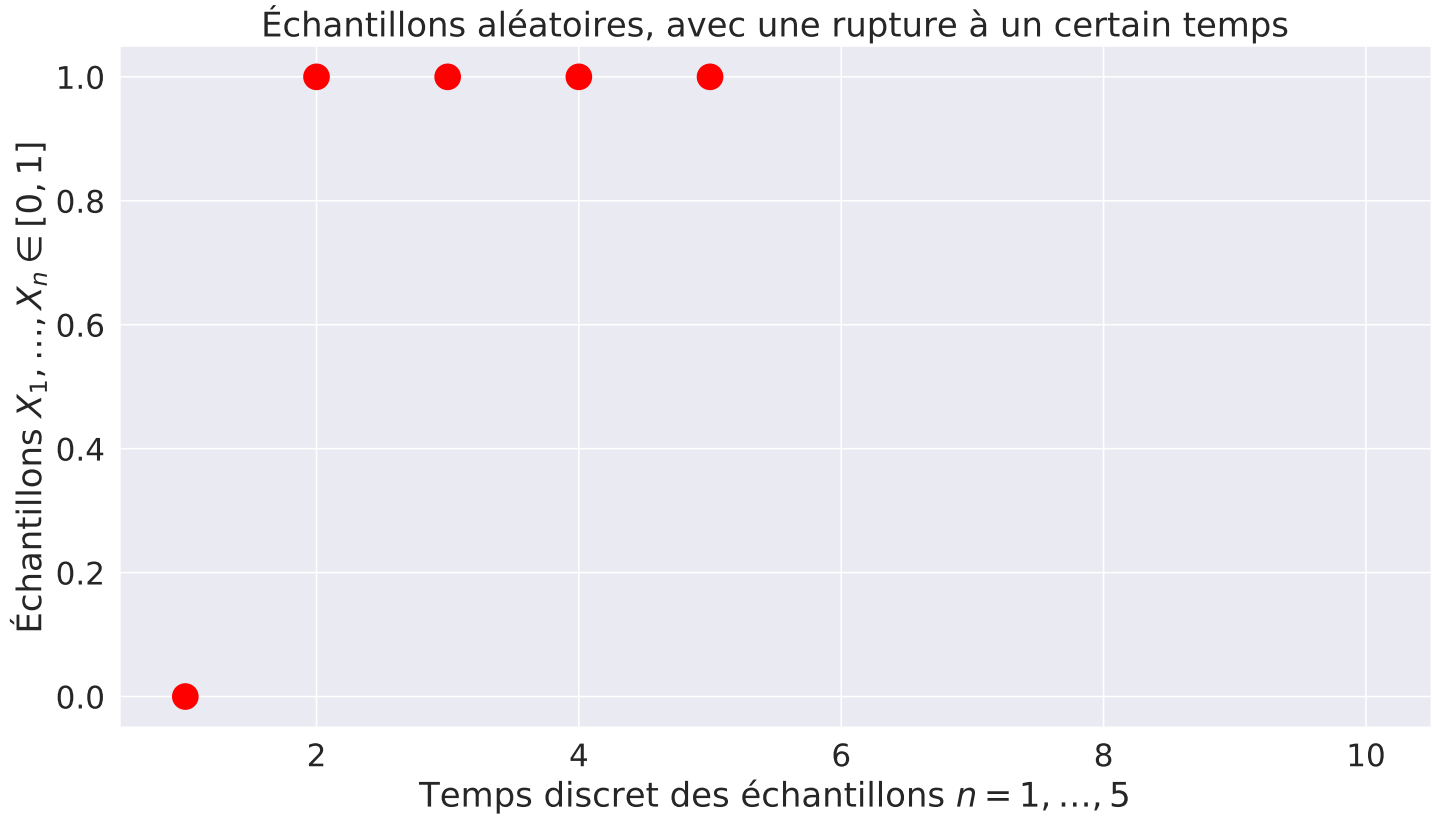
- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

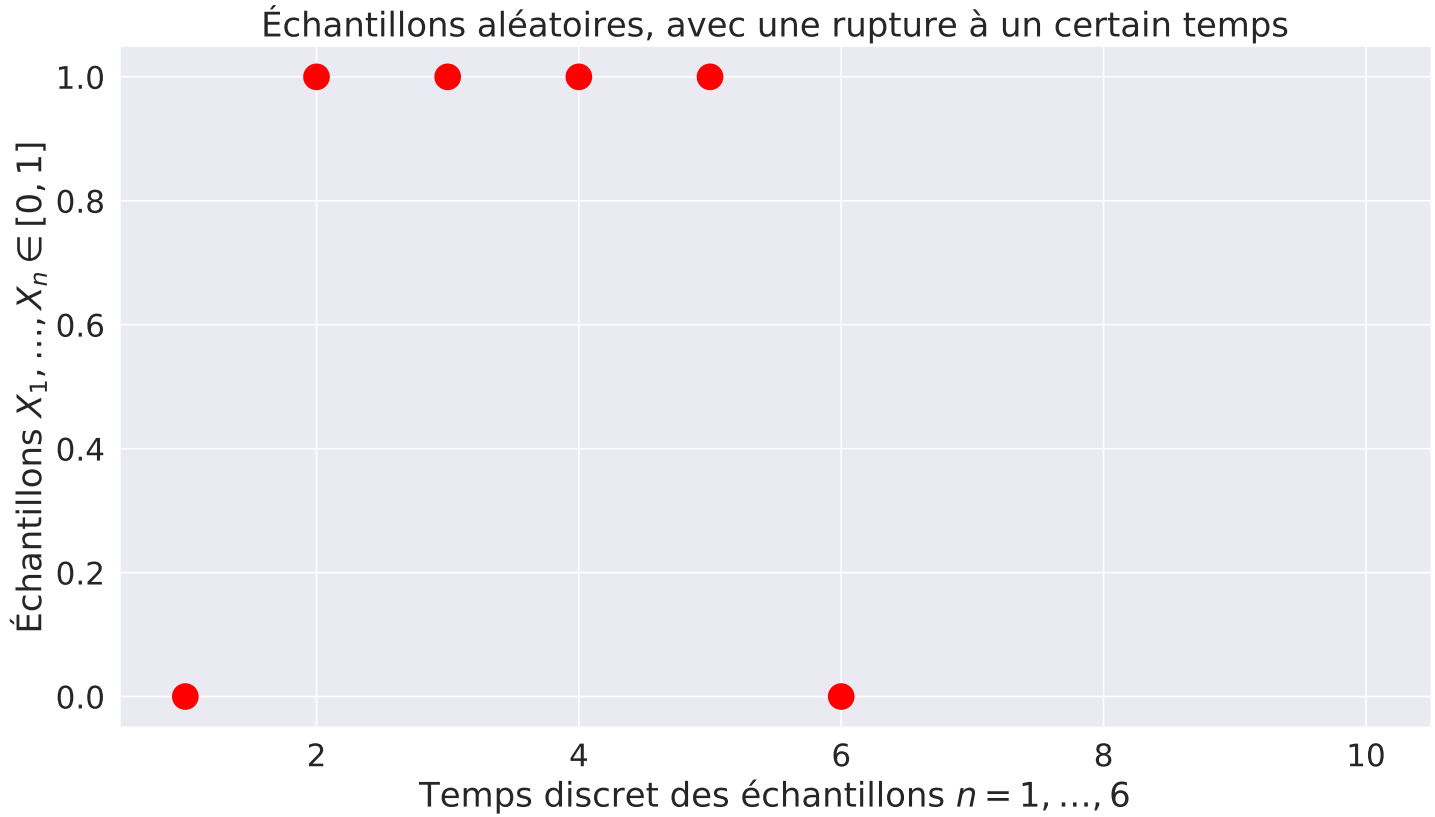
- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

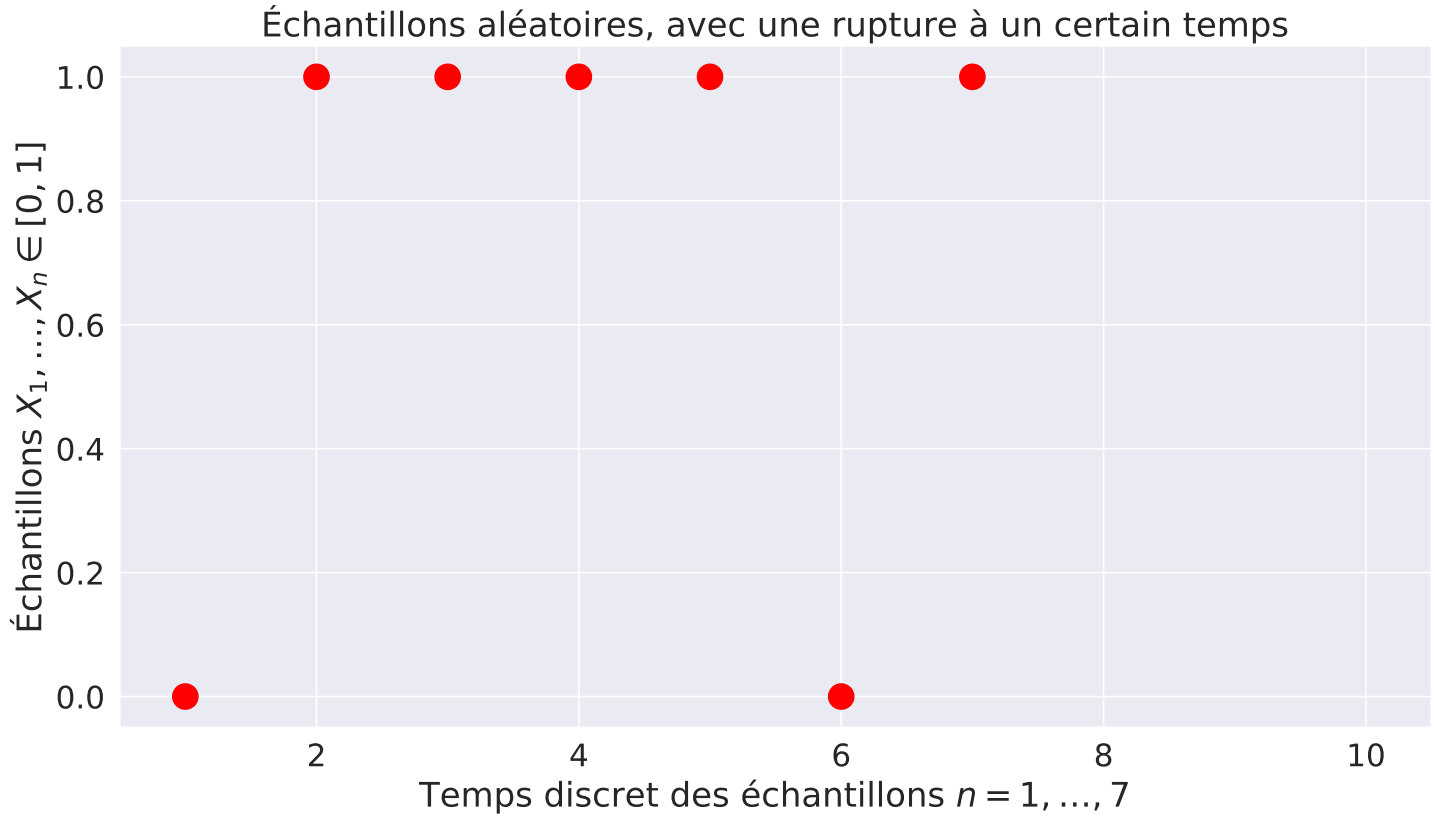
- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

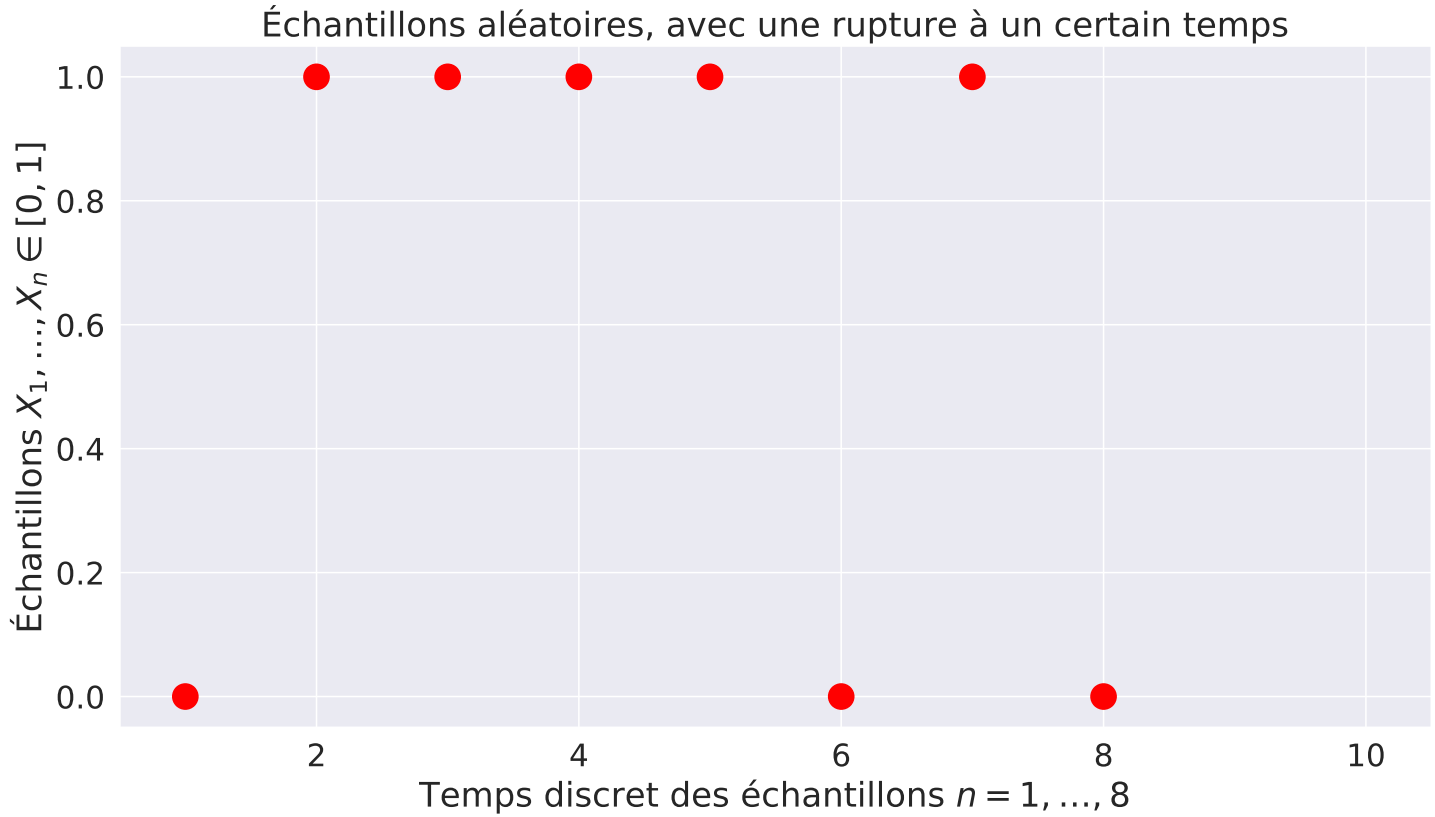
- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

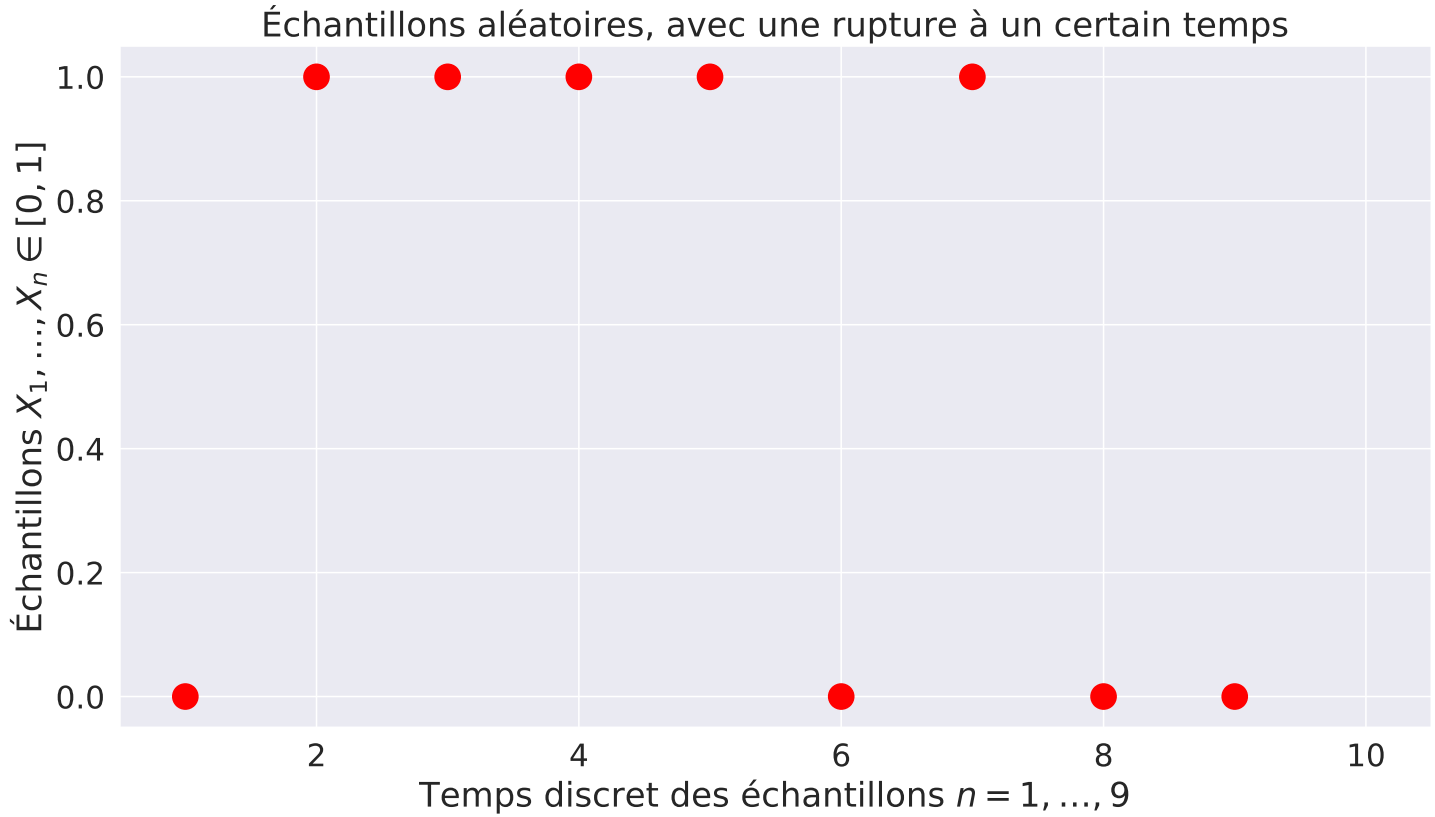
- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

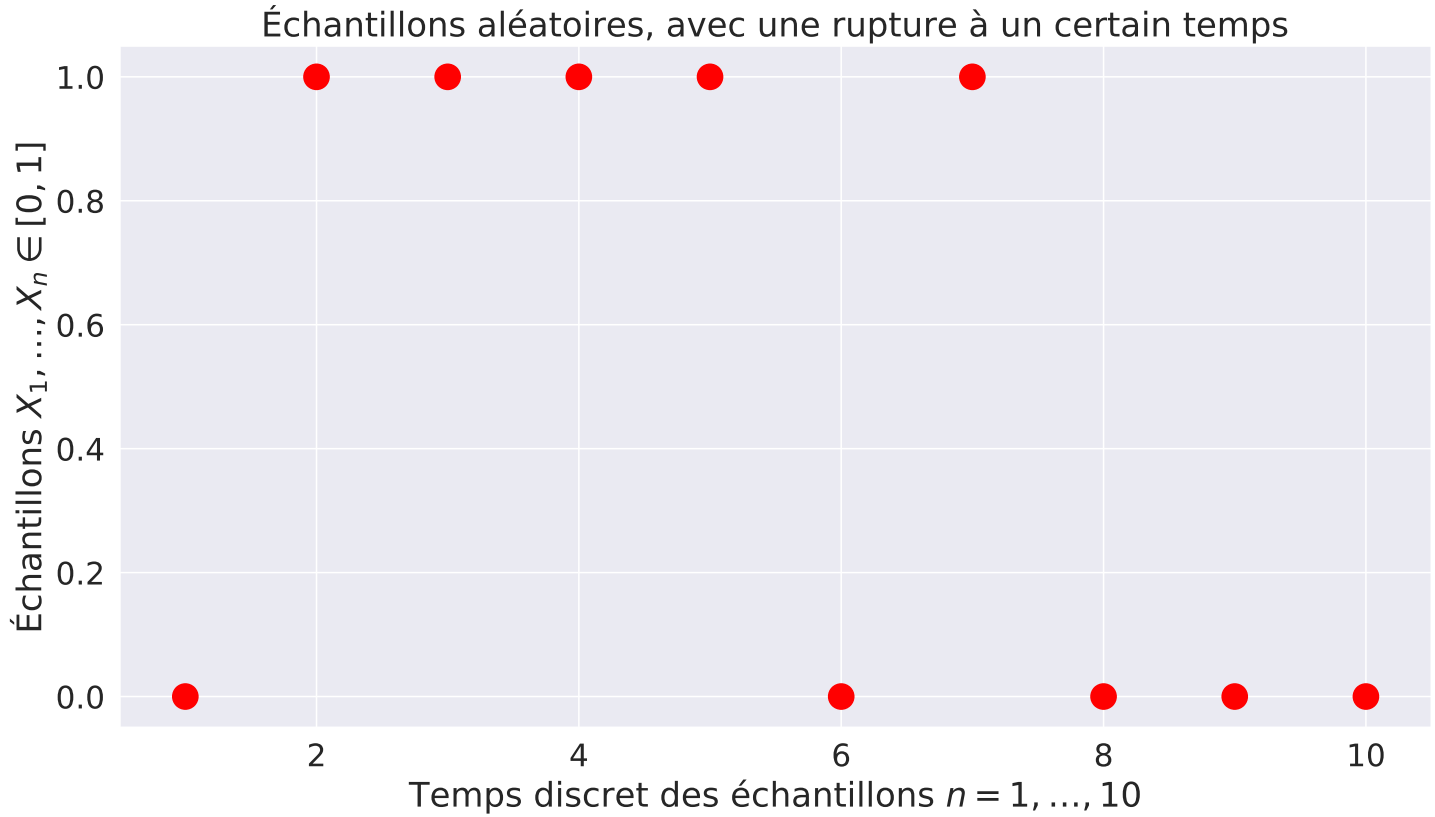
- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Imaginez le jeu suivant...

- On observe des données $X_1, X_2, \cdots, X_t, \cdots \in [0, 1]$...
- On sait que X_t est générée par une distribution inconnue...



Le problème de détection de rupture

Le but est de distinguer entre deux hypothèses :

$\mathcal{H}_0$ Les distributions **ont toutes la même moyenne** ("pas de rupture")
$\exists \mu_0, \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \cdots = \mathbb{E}[X_t] = \mu_0$

$\mathcal{H}_1$ Les distributions ont **changé de moyennes au temps** τ
$\exists \mu_0, \mu_1, \tau, \mathbb{E}[X_1] = \cdots = \mathbb{E}[X_\tau] = \mu_0,\ \mu_0 \neq \mu_1,\ \mathbb{E}[X_{\tau+1}] = \mathbb{E}[X_{\tau+2}] = \cdots = \mu_1$

On s'arrête au temps $\widehat{\tau}$, dès qu'on détecte une rupture

Le problème de détection de rupture

Le but est de distinguer entre deux hypothèses :

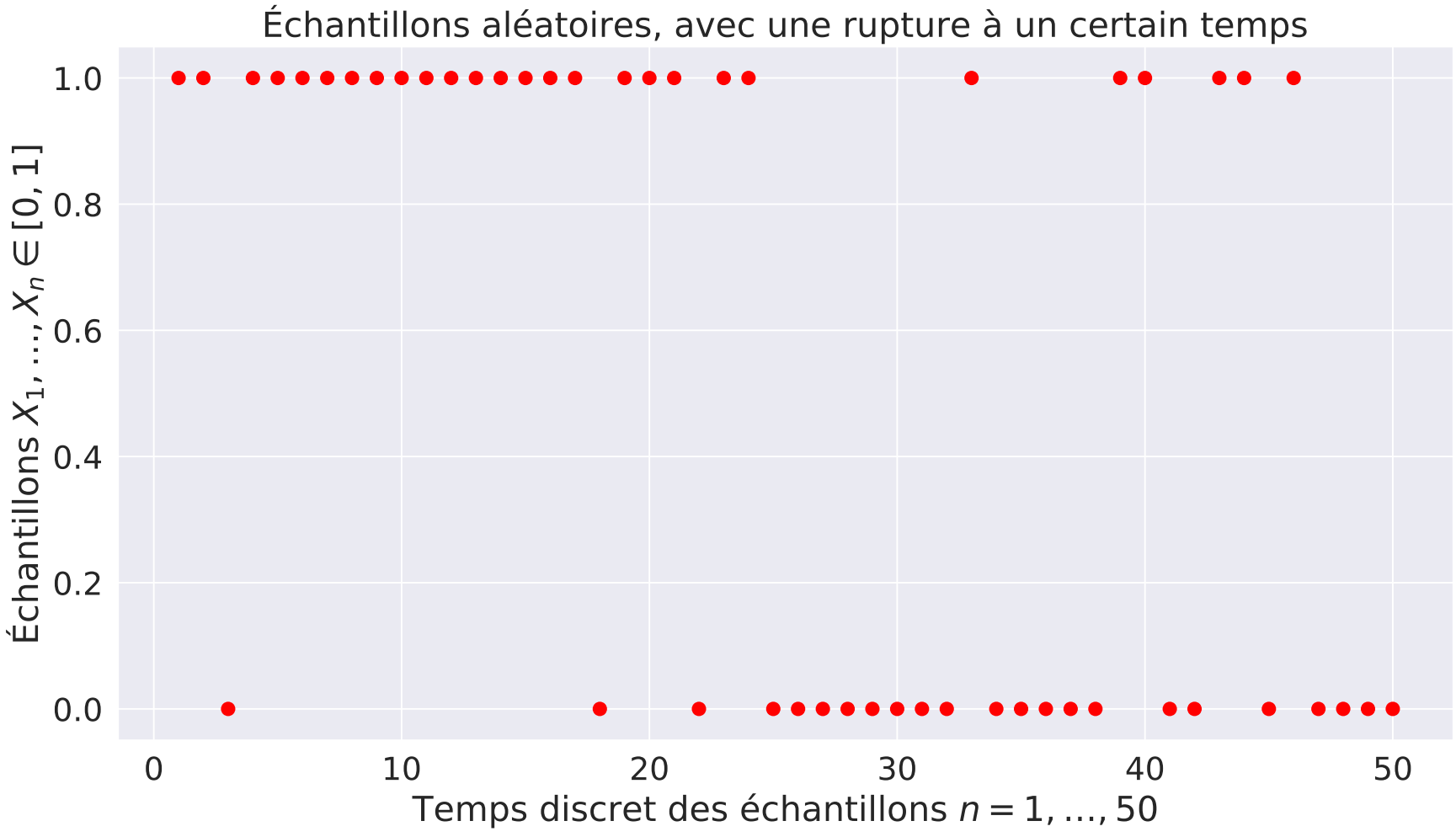
$\mathcal{H}_0$ Les distributions **ont toutes la même moyenne** ("pas de rupture")
$\exists \mu_0, \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \cdots = \mathbb{E}[X_t] = \mu_0$

$\mathcal{H}_1$ Les distributions ont **changé de moyennes au temps** τ
$\exists \mu_0, \mu_1, \tau, \mathbb{E}[X_1] = \cdots = \mathbb{E}[X_\tau] = \mu_0,\ \mu_0 \neq \mu_1,\ \mathbb{E}[X_{\tau+1}] = \mathbb{E}[X_{\tau+2}] = \cdots = \mu_1$

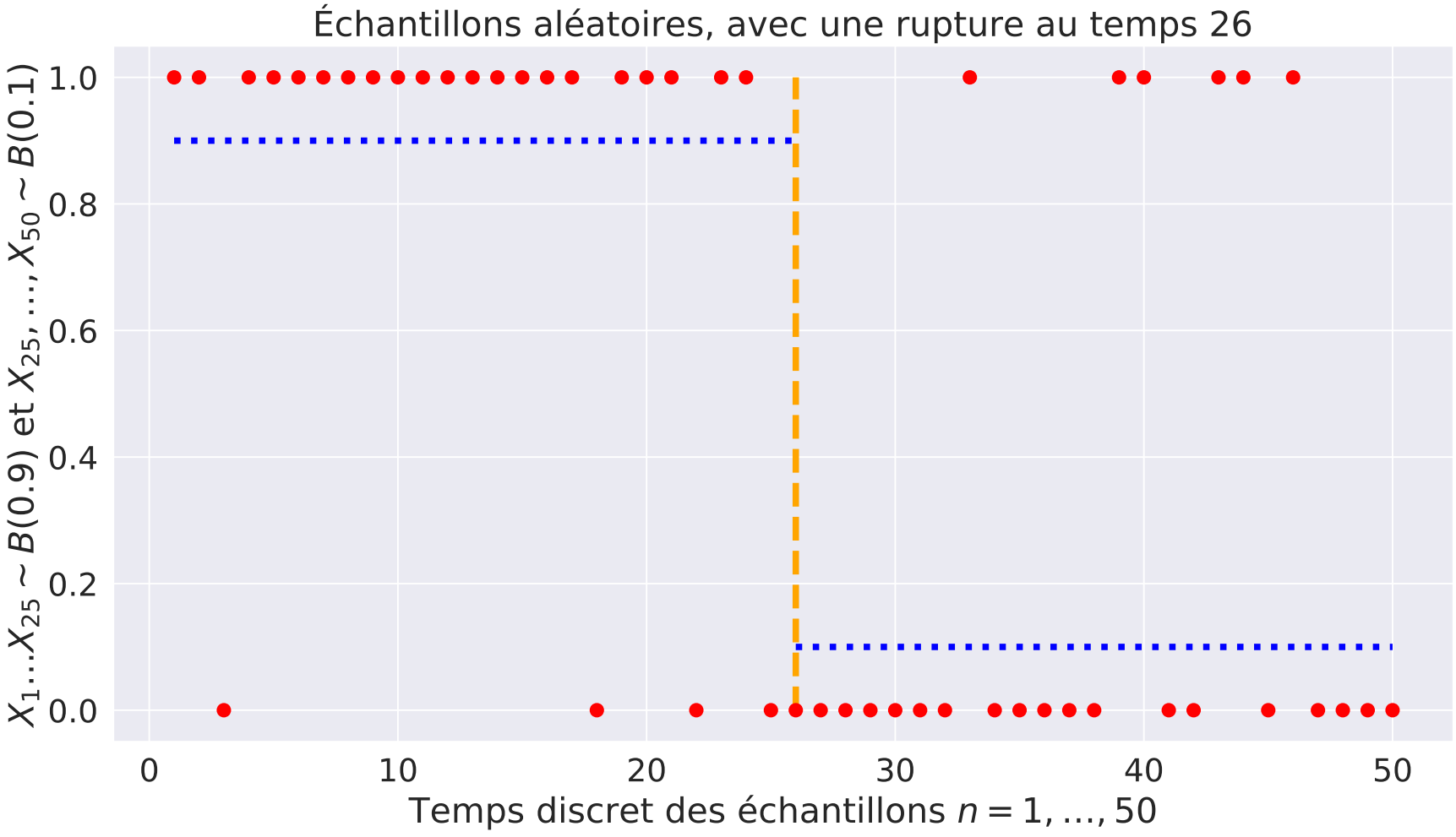
On s'arrête au temps $\widehat{\tau}$, dès qu'on détecte une rupture

Un détecteur de rupture séquentiel est un **temps d'arrêt** $\widehat{\tau}$, mesurable selon $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \cdots, X_t)$, qui rejette l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ lorsque $\widehat{\tau} < \infty$.

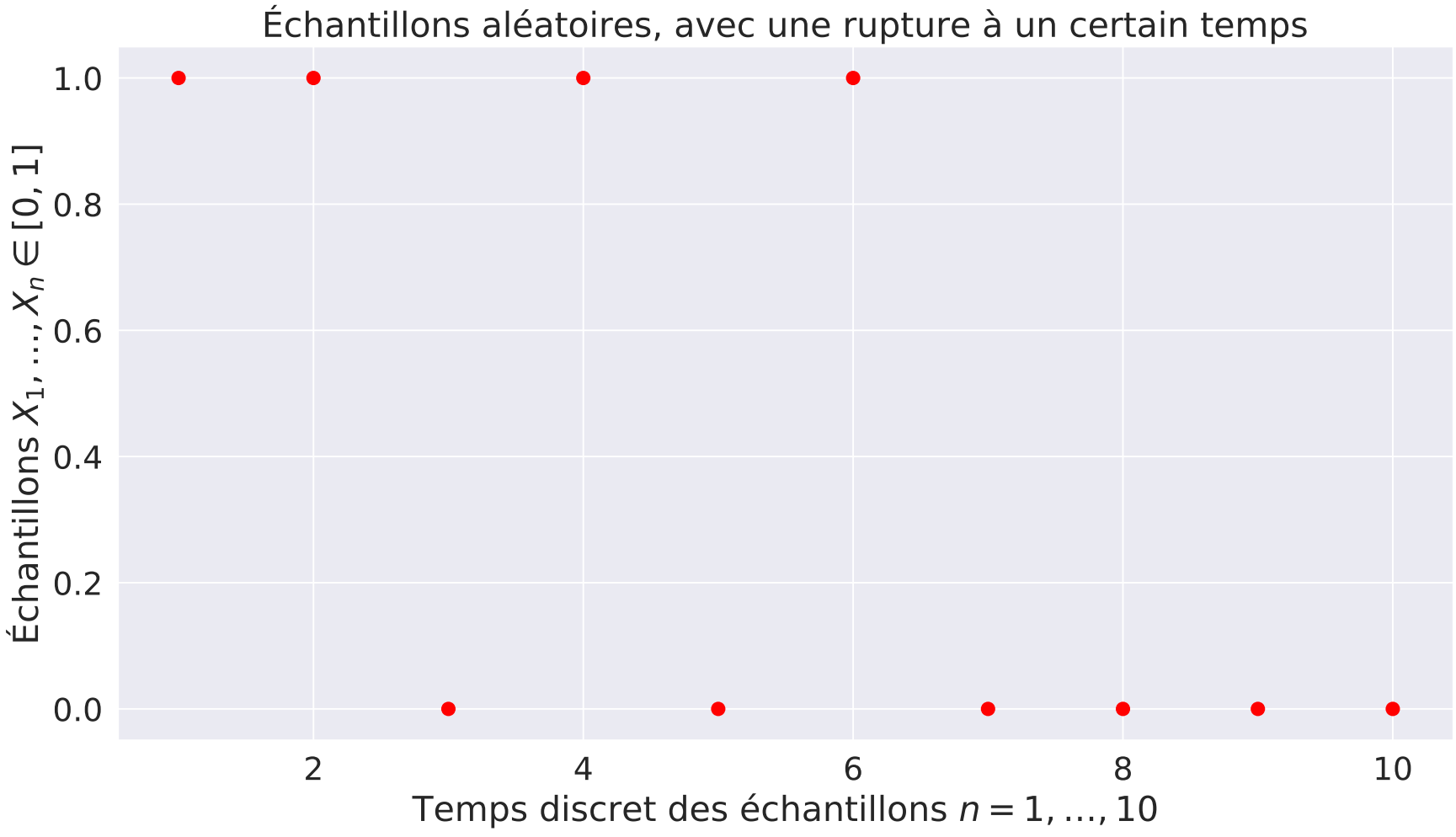
Exemple facile de détection de rupture



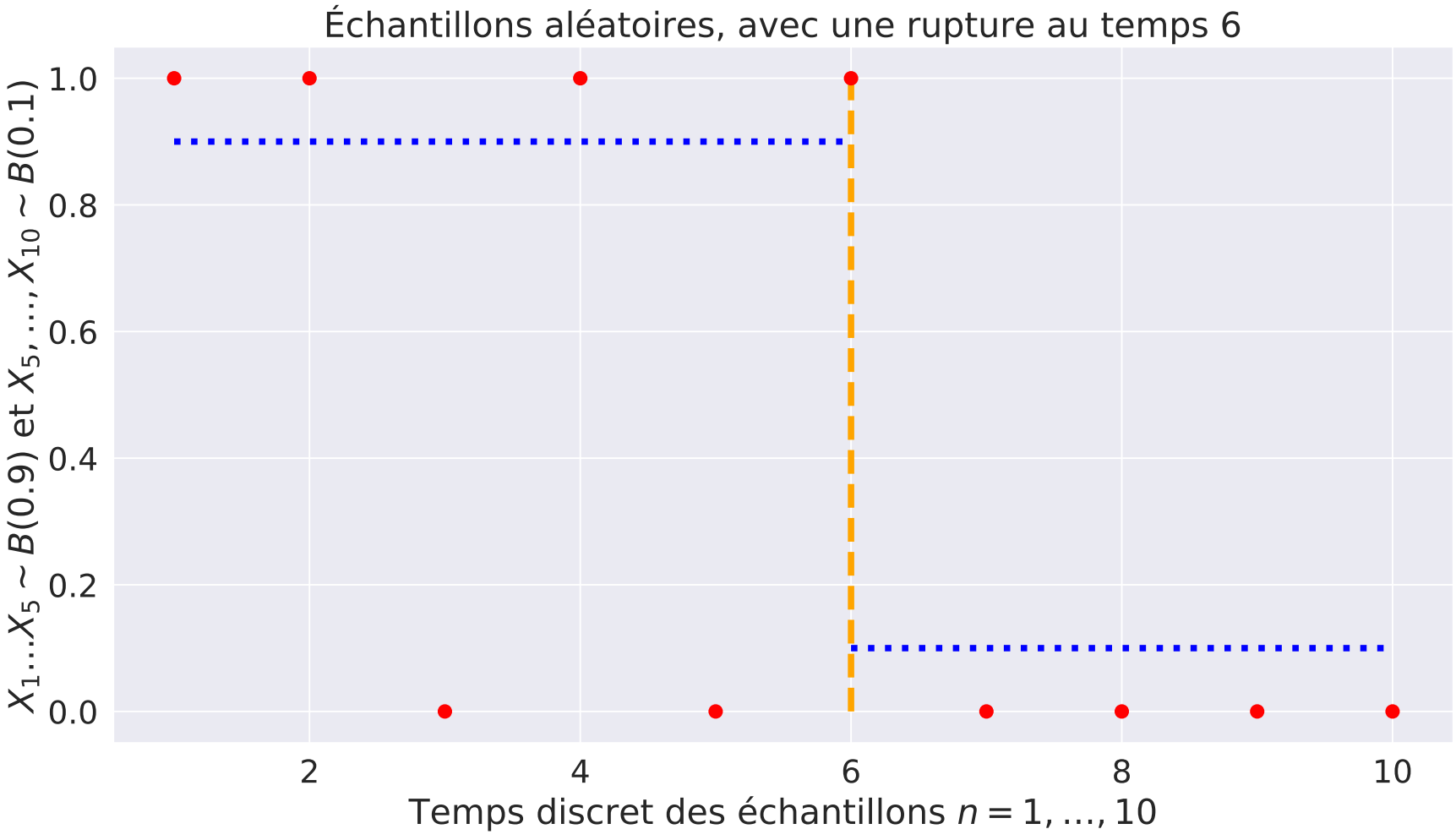
Exemple facile de détection de rupture



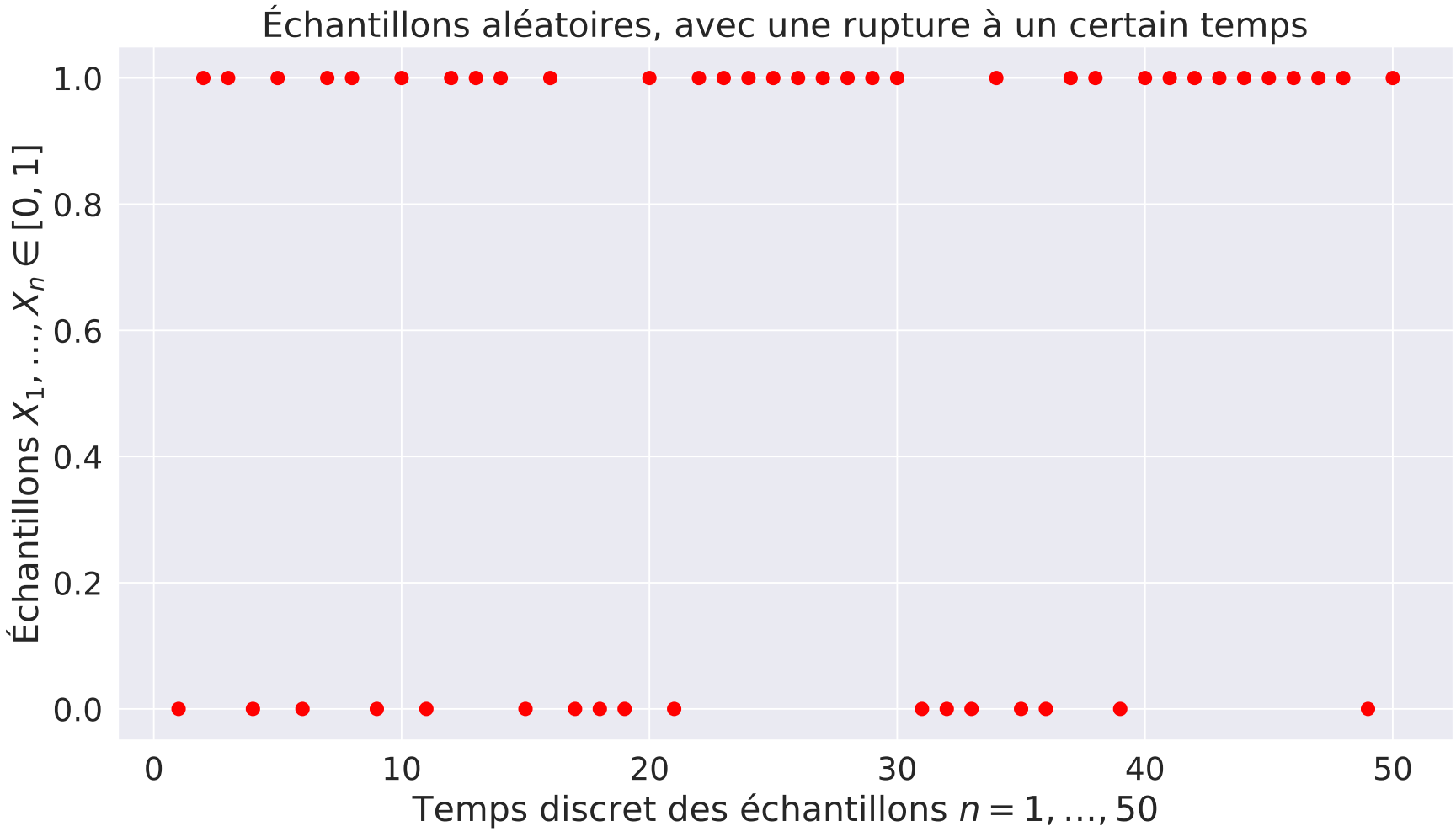
Difficile avec peu d'échantillons ?



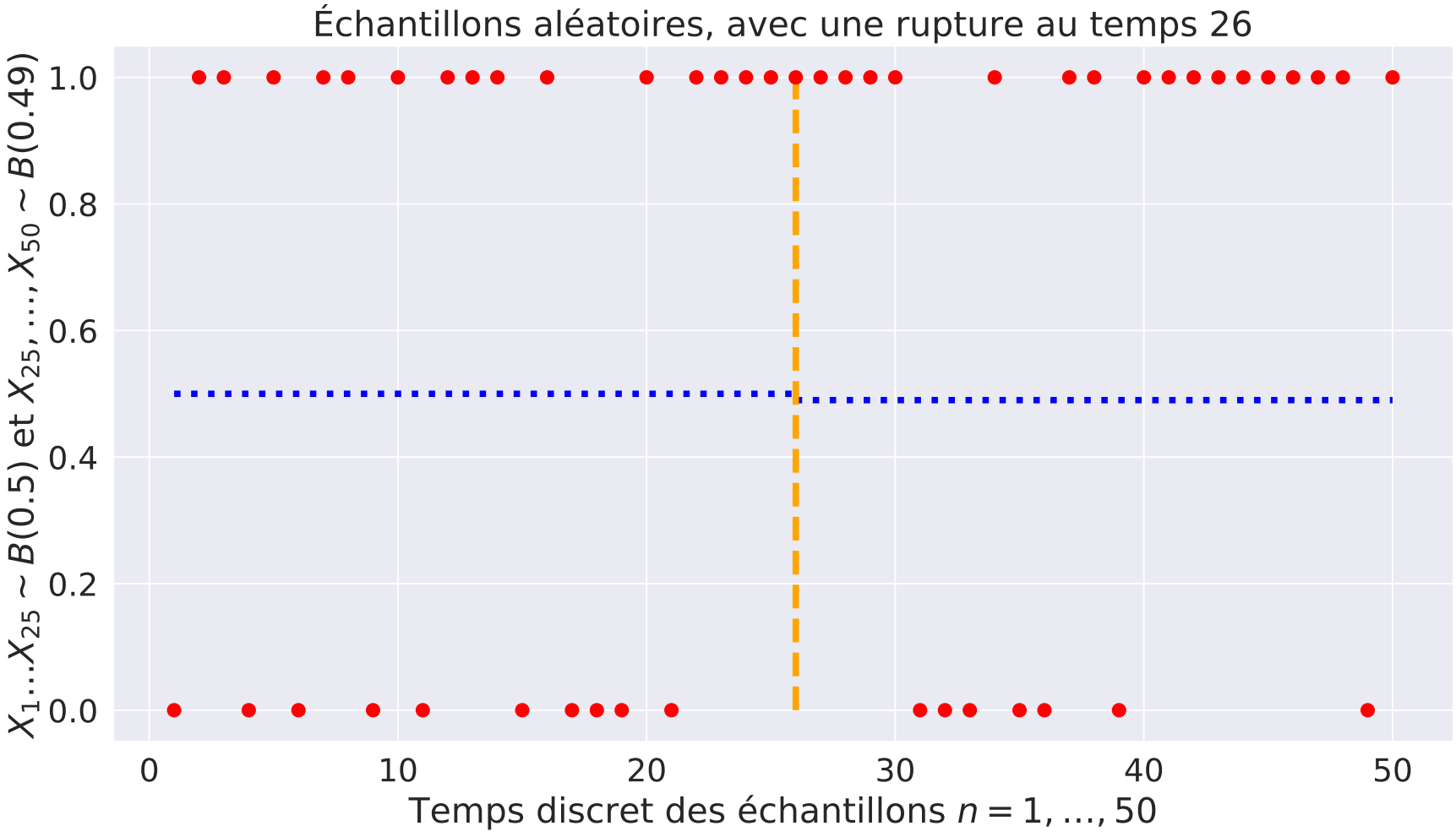
Difficile avec peu d'échantillons ?



Difficile avec des moyennes trop proches ?



Difficile avec des moyennes trop proches ?



Qu'est-ce qu'un bon test de détection de rupture ?

Deux propriétés essentielles :

1. Pas de **fausse alarme**

1. Un bon test ne doit rien détecter s'il n'y a pas de rupture à détecter...

2. Un **délai de détection** court

2. Un bon test devrait détecter une rupture "assez vite" s'il y a une rupture à détecter, avec assez d'échantillons avant la rupture...

Qu'est-ce qu'un bon test de détection de rupture ?

Deux propriétés essentielles :

1. Pas de **fausse alarme**

1. Un bon test ne doit rien détecter s'il n'y a pas de rupture à détecter...
Premier extrême : aucune fausse alarme si on détecte *jamais* 😞

2. Un **délai de détection** court

2. Un bon test devrait détecter une rupture "assez vite" s'il y a une rupture à détecter, avec assez d'échantillons avant la rupture...
Autre extrême : délai nul si on détecte *tout le temps* 😞

$\Longrightarrow$ résoudre le compromis entre les deux extrêmes !

Test de rapport de vraisemblances de Bernoulli

Hypothèses : toutes les distributions sont Bernoulli ($\nu_k = \mathcal{B}(\mu_k)$)

Le problème se résume à distinguer

$\mathcal{H}_0$: $(\exists \mu_0 : \forall i \in \mathbb{N}^*, X_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(\mu_0))$, contre l'alternative

$\mathcal{H}_1$: $(\exists \mu_0 \neq \mu_1, \tau > 1 : X_1, \cdots, X_\tau \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(\mu_0)$ et $X_{\tau+1}, \cdots \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(\mu_1))$.

Test de rapport de vraisemblances de Bernoulli

Hypothèses : toutes les distributions sont Bernoulli ($\nu_k = \mathcal{B}(\mu_k)$)

Le problème se résume à distinguer

$\mathcal{H}_0$: $(\exists \mu_0 : \forall i \in \mathbb{N}^*, X_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(\mu_0))$, contre l'alternative

$\mathcal{H}_1$: $(\exists \mu_0 \neq \mu_1, \tau > 1 : X_1, \cdots, X_\tau \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(\mu_0)$ et $X_{\tau+1}, \cdots \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(\mu_1))$.

Après avoir observé $X_1, \cdots, X_n$, la statistique du test de rapport de vraisemblances pour cette hypothèse est

$$\mathcal{L}(n) = \frac{\sup\limits_{\mu_0, \mu_1, \tau < n} \ell(X_1, \cdots, X_n; \mu_0, \mu_1, \tau)}{\sup\limits_{\mu_0} \ell(X_1, \cdots, X_n; \mu_0)},$$

où $\ell(X_1, \cdots, X_n; \mu_0)$ et $\ell(X_1, \cdots, X_n; \mu_0, \mu_1, \tau)$ sont les vraisemblances des observations selon les modèles $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.

Test de rapport de vraisemblances de Bernoulli

Hypothèses : toutes les distributions sont Bernoulli ($\nu_k = \mathcal{B}(\mu_k)$)

Le problème se résume à distinguer

$\mathcal{H}_0$: $(\exists \mu_0 : \forall i \in \mathbb{N}^*, X_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(\mu_0))$, contre l'alternative

$\mathcal{H}_1$: $(\exists \mu_0 \neq \mu_1, \tau > 1 : X_1, \cdots, X_\tau \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(\mu_0)$ et $X_{\tau+1}, \cdots \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{B}(\mu_1))$.

Après avoir observé $X_1, \cdots, X_n$, la statistique du test de rapport de vraisemblances pour cette hypothèse est

$$\mathcal{L}(n) = \frac{\sup\limits_{\mu_0, \mu_1, \tau < n} \ell(X_1, \cdots, X_n; \mu_0, \mu_1, \tau)}{\sup\limits_{\mu_0} \ell(X_1, \cdots, X_n; \mu_0)},$$

où $\ell(X_1, \cdots, X_n; \mu_0)$ et $\ell(X_1, \cdots, X_n; \mu_0, \mu_1, \tau)$ sont les vraisemblances des observations selon les modèles $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$.

$\hookrightarrow$ De grandes valeurs de $\mathcal{L}(n)$ tendent à rejeter $\mathcal{H}_0$ en faveur de $\mathcal{H}_1$.

(log) Rapport de vraisemblances de Bernoulli

On peut réécrire cette statistique $\mathcal{L}(n) = \frac{\sup_{\mu_0,\mu_1,\tau<n} \ell(X_1,\cdots,X_n;\mu_0,\mu_1,\tau)}{\sup_{\mu_0} \ell(X_1,\cdots,X_n;\mu_0)}$, avec

les moyennes glissantes $\widehat{\mu}_{k:k'} = \frac{1}{k'-k+1} \sum_{s=k}^{k'} X_s$:

$$\log \mathcal{L}(n) = \max_{s\in\{1,\cdots,n-1\}} \Big[s \times \mathrm{kl}(\underbrace{\widehat{\mu}_{1:s}}_{\text{avant } s} , \underbrace{\widehat{\mu}_{1:n}}_{\text{tout}}) + (n-s) \times \mathrm{kl}(\underbrace{\widehat{\mu}_{s+1:n}}_{\text{après } s}, \underbrace{\widehat{\mu}_{1:n}}_{\text{tout}}) \Big].$$

Où $\mathrm{kl}(x,y) = x\ln\left(\frac{x}{y}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right)$ est l'entropie relative binaire

Le test généralisé de rapport de vraisemblances de Bernoulli (T-BGLR)

Le T-BGLR est le temps d'arrêt $\widehat{\tau}_\delta$ définit par

$$\widehat{\tau}_\delta = \inf\Big\{ n \in \mathbb{N}^* : \max_{s \in \{1,\cdots,n-1\}} \Big[s\,\mathrm{kl}\left(\widehat{\mu}_{1:s}, \widehat{\mu}_{1:n}\right) + (n-s)\,\mathrm{kl}\left(\widehat{\mu}_{s+1:n}, \widehat{\mu}_{1:n}\right) \Big] \geq \beta(n,\delta) \Big\}$$

- avec une function seuil $\beta(n,\delta)$ spécifiée plus tard,
- $n \in \mathbb{N}^*$ est le nombre d'observations $(X_1, \ldots, X_n)$,
- $0 < \delta < 1$ est le niveau de confiance.

Probabilité de fausse alarme

Définition : fausse alarme

Une rupture est détectée si $\widehat{\tau}_\delta < \infty$.

Soit $\mathbb{P}_{\mu_0}$ un modèle de probabilité selon lequel les observations sont $\forall t, X_t \in [0,1]$ et $\forall t, \mathbb{E}[X_t] = \mu_0$.

La probabilité de fausse alarme est $\mathbb{P}_{\mu_0}(\widehat{\tau}_\delta < \infty)$.

$\Longrightarrow$ But : contrôler l'événement de fausse alarme ! (en forte proba)

Premier résultat pour le test BGLR

Contrôler la probabilité de fausse alarme

Pour n'importe quel niveau de confiance $0 < \delta < 1$, le test BGLR satisfait

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(\widehat{\tau}_\delta < \infty) \leq \delta$$

avec la fonction seuil

$$\beta(n,\delta) = 2\,\mathcal{T}\left(\frac{\ln(3n\sqrt{n}/\delta)}{2}\right) + 6\ln(1+\ln(n)) \simeq \ln\left(\frac{3n\sqrt{n}}{\delta}\right) = \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{n}{\delta}\right)\right).$$

Où $\mathcal{T}(x)$ vérifie $\mathcal{T}(x) \simeq x + \ln(x)$ pour x assez grand

Premier résultat pour le test BGLR

Contrôler la probabilité de fausse alarme

Pour n'importe quel niveau de confiance $0 < \delta < 1$, le test BGLR satisfait

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(\widehat{\tau}_\delta < \infty) \leq \delta$$

avec la fonction seuil

$$\beta(n, \delta) = 2\,\mathcal{T}\left(\frac{\ln(3n\sqrt{n}/\delta)}{2}\right) + 6\ln(1+\ln(n)) \simeq \ln\left(\frac{3n\sqrt{n}}{\delta}\right) = \mathcal{O}\left(\log\left(\frac{n}{\delta}\right)\right).$$

Où $\mathcal{T}(x)$ vérifie $\mathcal{T}(x) \simeq x + \ln(x)$ pour x assez grand

Preuve ?

$\hookrightarrow$ la version longue de notre article HAL-02006471 et arXiv:1902.01575

Délai de détection

Definition : délai de détection

Soit $\mathbb{P}_{\mu_0,\mu_1,\tau}$ un modèle de probabilité selon lequel $\forall t, X_t \in [0,1]$ et $\forall t \leq \tau, \mathbb{E}[X_t] = \mu_0$ et $\forall t \geq \tau+1, \mathbb{E}[X_t] = \mu_1$, avec $\mu_0 \neq \mu_1$.

Le délai de détection est définit par la variable aléatoire $u = \widehat{\tau}_\delta - \tau \in \mathbb{N}$.

$\Longrightarrow$ But : contrôler le délai de détection ! (en forte probabilité)

Second résultat pour le test BGLR

Contrôler le délai de détection

Pour une rupture d'amplitude $\Delta = |\mu_1 - \mu_0|$, le test BGLR satisfait

$$\mathbb{P}_{\mu_0,\mu_1,\tau}(\widehat{\tau}_\delta \geq \tau + u) \leq \exp\left(-\frac{2\tau u}{\tau+u}\left(\max\left[0, \Delta - \sqrt{\frac{\tau+u}{2\tau u}\beta(\tau+u,\delta)}\right]\right)^2\right)$$
$$= \mathcal{O}(\text{décroissance exponentielle en } u)$$
$$= \mathcal{O}(\exp \searrow (u)).$$

avec la même fonction de seuil $\beta(n,\delta) \simeq \ln(3n\sqrt{n}/\delta)$.

Conséquence

En forte probabilité, le délai $\widehat{\tau}_\delta$ du BGLR est borné par $\mathcal{O}(\Delta^{-2}\ln(1/\delta))$ si assez d'échantillons sont observés avant la rupture au temps τ.

BGLR est un test de détection de rupture efficace 😎 !

- On a vu qu'en choisissant
  - un niveau de confiance δ,
  - et une bonne fonction de seuil $\beta(n, \delta) \simeq \ln(3n\sqrt{n}/\delta) = \mathcal{O}(\log(n/\delta))$,

BGLR est un test de détection de rupture efficace 😎 !

- On a vu qu'en choisissant
  - un niveau de confiance δ,
  - et une bonne fonction de seuil $\beta(n, \delta) \simeq \ln(3n\sqrt{n}/\delta) = \mathcal{O}(\log(n/\delta))$,
- on peut contrôler les deux propriétés du test BGLR :
  - sa probabilité de fausse alarme : $\mathbb{P}_{\mu_0}(\widehat{\tau}_\delta < \infty) \leq \delta$,
  - son délai de détection : $\mathbb{P}_{\mu_0,\mu_1,\tau}(\widehat{\tau}_\delta \geq \tau + u)$ décroît exponentiellement rapidement en u
    (s'il y a assez d'observations avant et après la rupture)
- $\Longrightarrow$ Le test BGLR détecte les ruptures efficacement 😎

Simulations numériques

On considère trois problèmes avec

- $K = 3$ bras de Bernoulli
- $T = 5000$ étapes de temps (horizon fini)
- $\Upsilon_T = 4$ ruptures ($= 5$ séquences stationnaires)
  Les algorithmes peuvent utiliser cette connaissance de T et Υ_T
- 1000 simulations indépendantes, on affiche le regret moyen

Simulations numériques

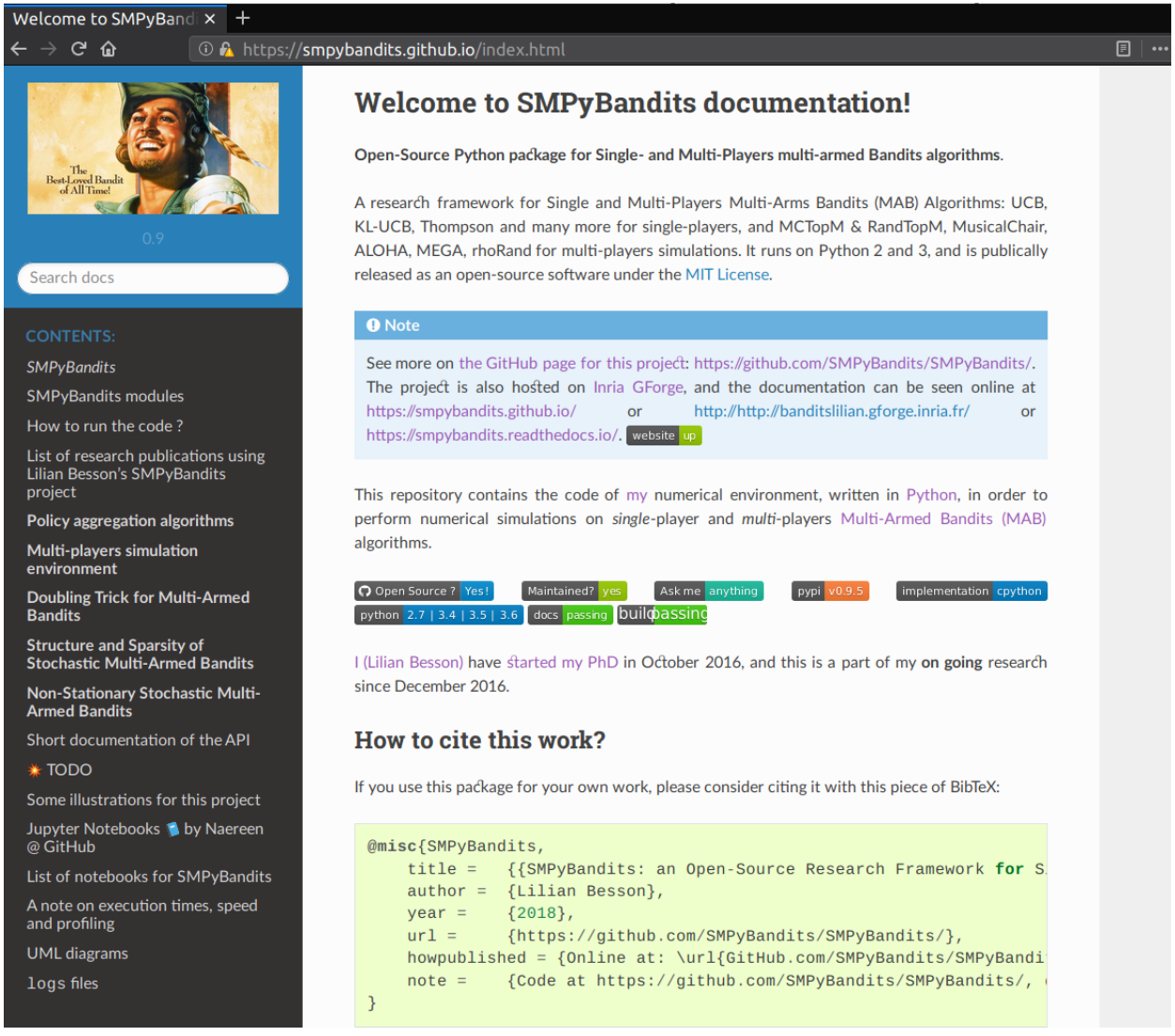
On considère trois problèmes avec

- $K = 3$ bras de Bernoulli
- $T = 5000$ étapes de temps (horizon fini)
- $\Upsilon_T = 4$ ruptures ($= 5$ séquences stationnaires)
  Les algorithmes peuvent utiliser cette connaissance de T et Υ_T
- 1000 simulations indépendantes, on affiche le regret moyen

Référence

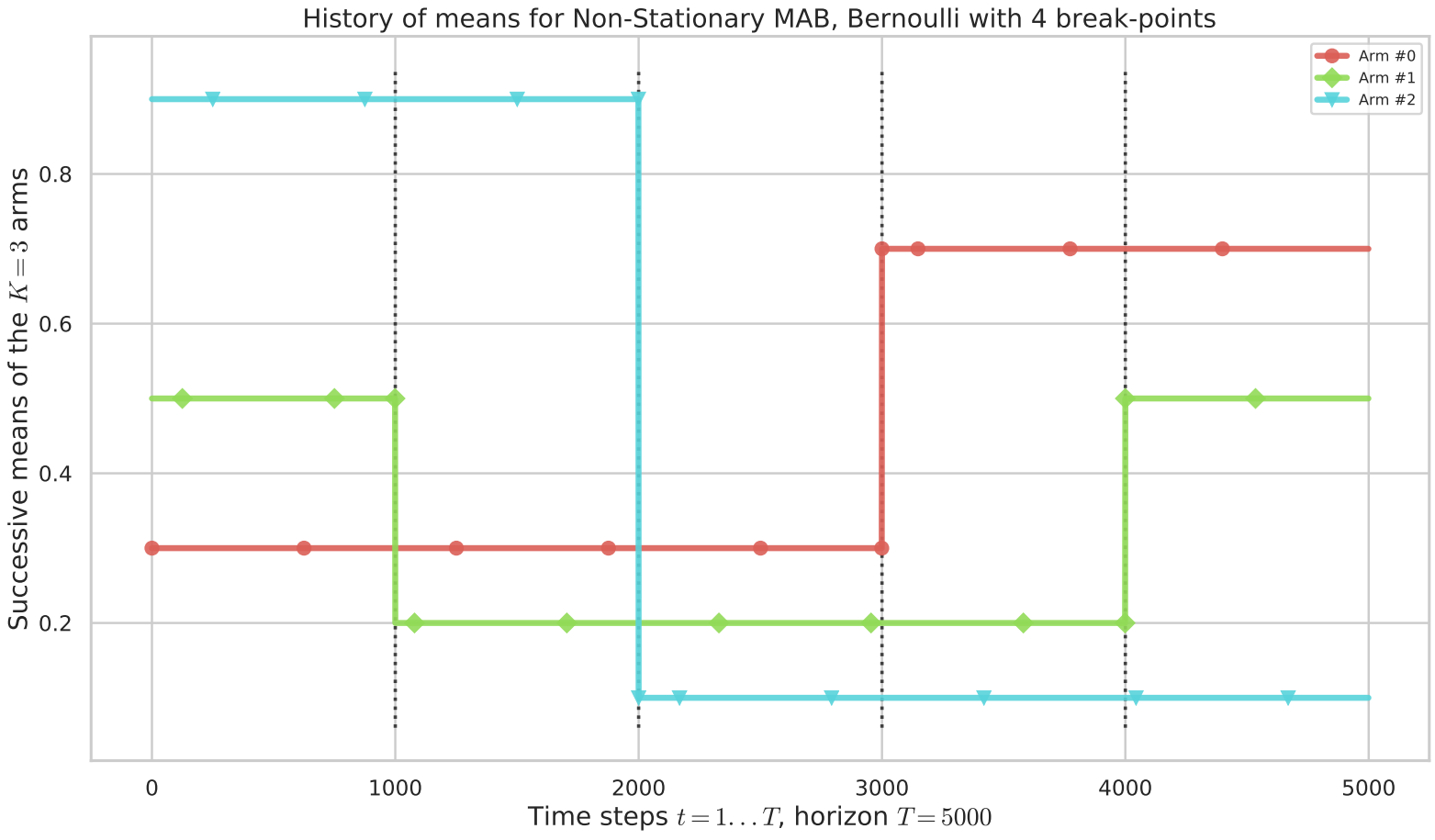
On utilise ma bibliothèque open-source en Python pour la simulation de problèmes de bandits, **SMPyBandits**
$\hookrightarrow$ Publiée en ligne à `SMPyBandits.GitHub.io`

Pour les curieux : SMPyBandits est sur GitHub et PyPI



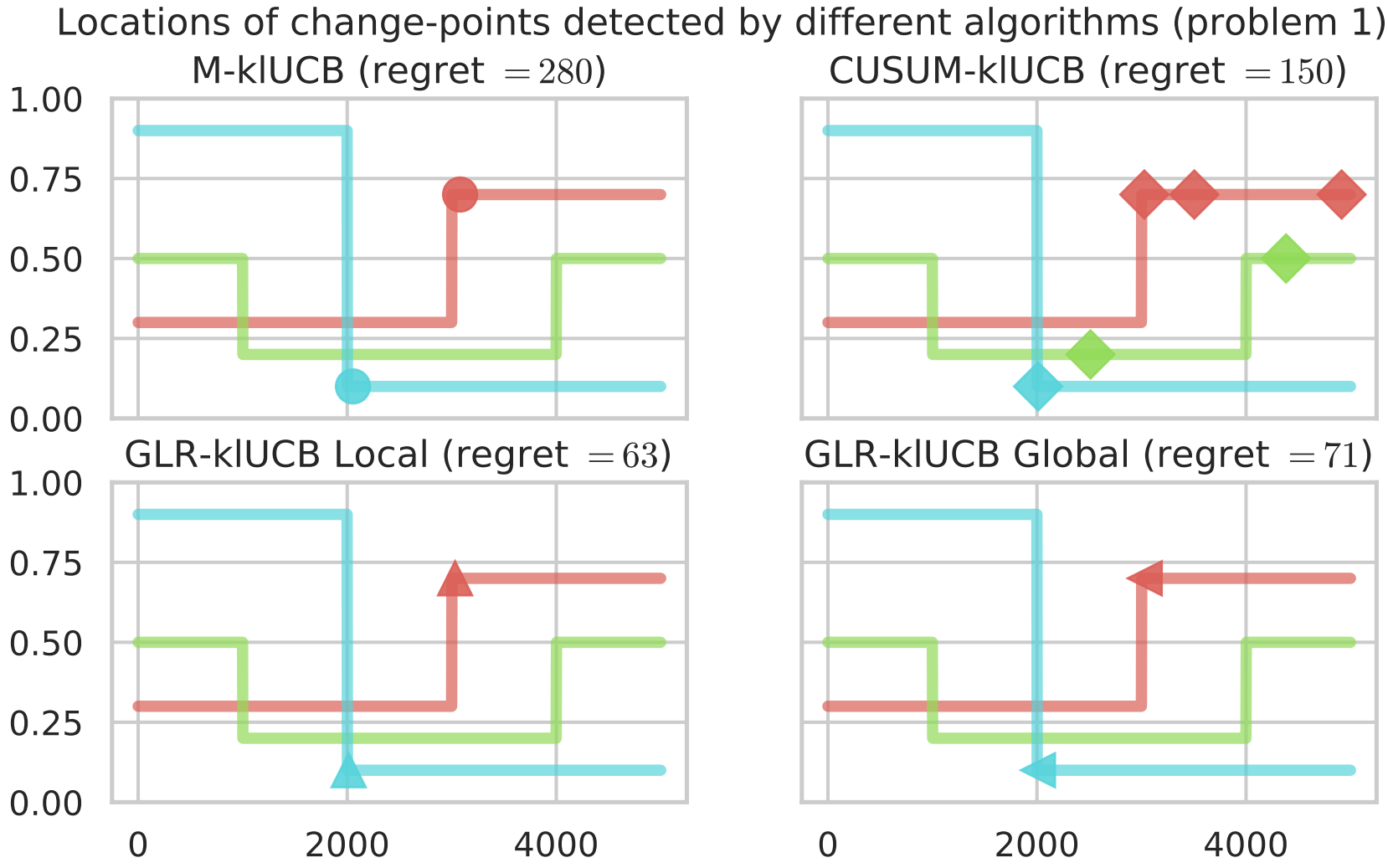
↪ SMPyBandits.GitHub.io

Problème 1 : seulement des changements locaux



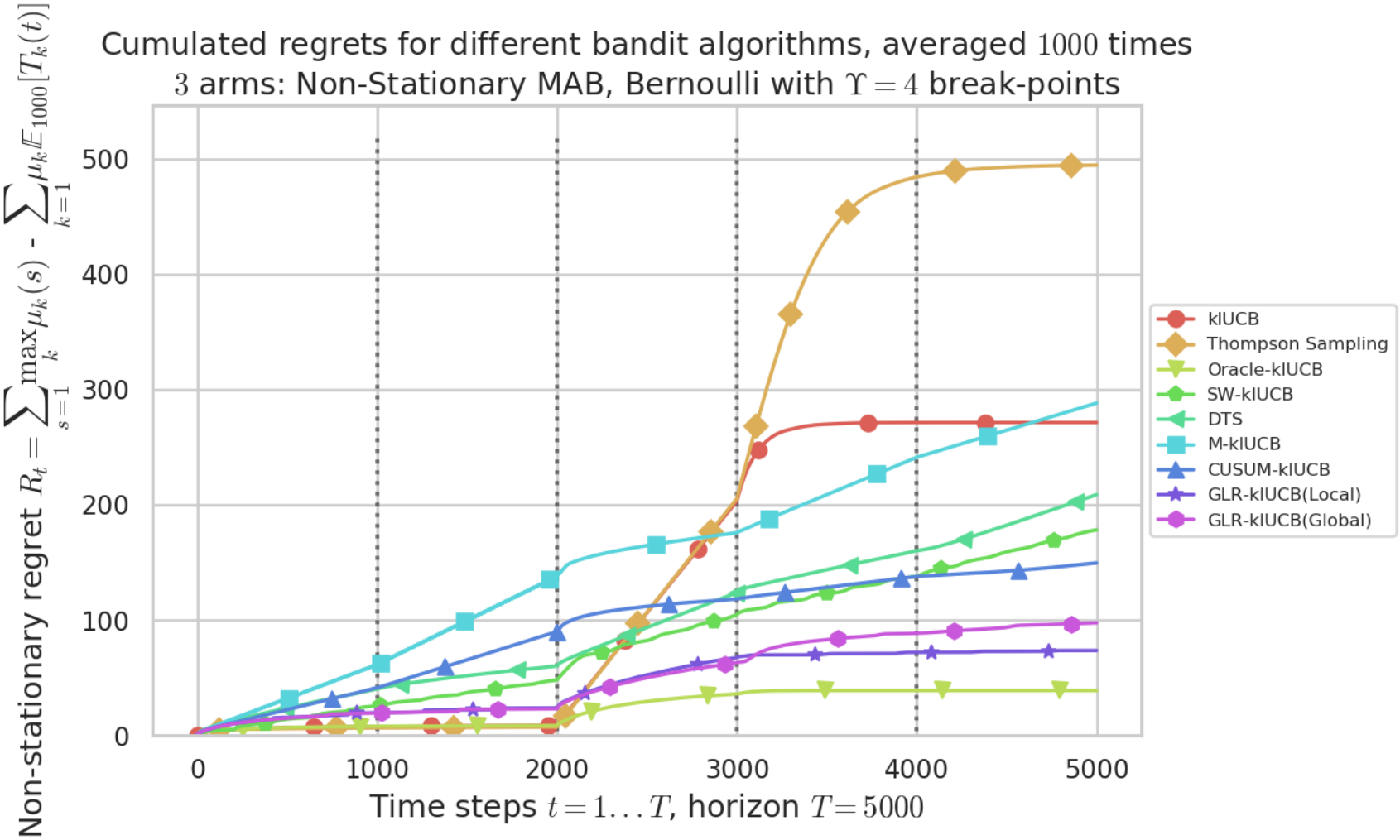
On affiche les moyennes : $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$.

Exemple de détections de ruptures pour le problème 1



$\Longrightarrow$ Notre test est efficace ! (sur un exemple)

Résultats pour le problème 1



$\Longrightarrow$ BGLR atteint les meilleures performances (hors non-oracles) 😎 !

Résumé

- Le test généralisé de rapport de vraisemblances de Bernoulli (T-BGLR) est très efficace 😎
  - pour détecter les ruptures sans fausse alarme et faible délai
  - pour des données de Bernoulli, et aussi des données sous-Bernoulli (n'importe quelle distribution bornée !),
  - et n'a *pas* besoin de connaître l'amplitude des ruptures Δ
- On peut le combiner avec une stratégie de bandit efficace : BGLR + kl-UCB 😎
- Sa borne de regret est $R_T = \mathcal{O}(K\sqrt{T\Upsilon_T \log(T)})$ 😎 (état de l'art)
- Notre algorithme est compétitif avec le reste de l'état de l'art sur nos simulations numériques 😎

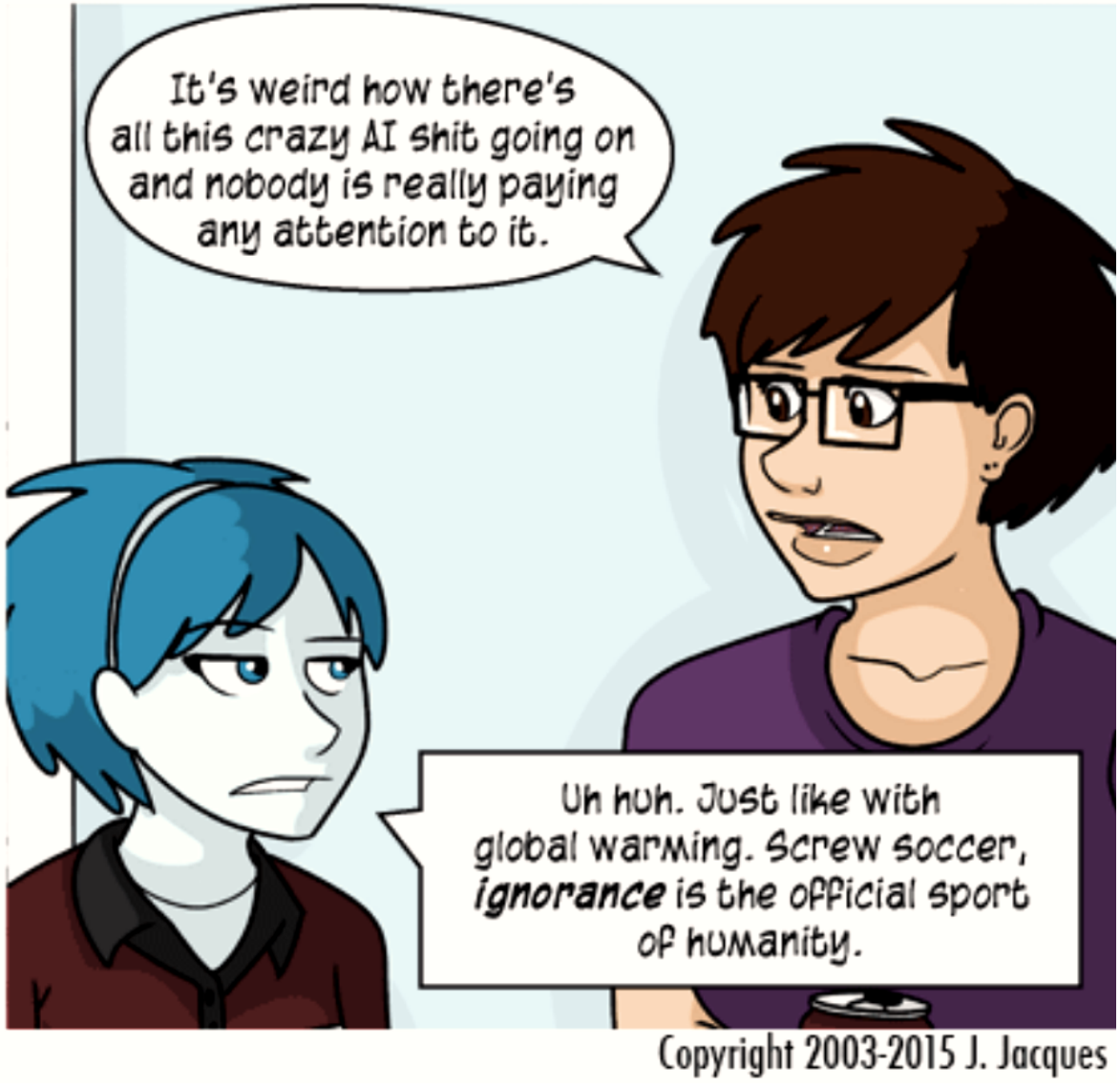
Conclusion

Merci de votre attention

Questions & Discussion ?

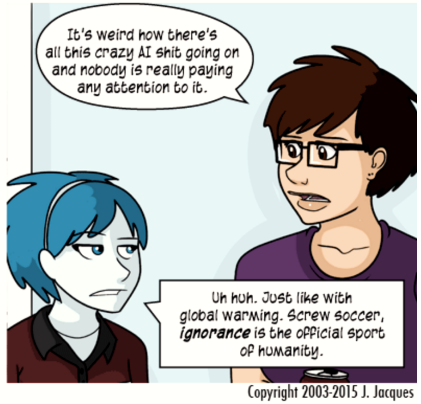
Si besoin :
Lilian.Besson@CentraleSupelec.fr

Crise climatique ?



© Jeph Jacques, 2015, `QuestionableContent.net/view.php?comic=3074`

Parlons d'action contre la crise climatique !



Nous sommes scientifiques...

Buts : s'informer, réfléchir, résoudre, transmettre !

- Informons nous des causes et conséquences de la crise climatique,
- Réfléchissons aux problèmes, à l'échelle politique, locale et individuelle,
- Trouvons des solutions simples !
  $\Longrightarrow$ Viser la sobriété : transports, tourisme, vêtements, alimentation, calculs informatique, lutte contre le tabagisme, etc.
- Transmettons notre prise de conscience, et nos actions.